

Phần I ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH.**Chương I : HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC.****Bài 1 : HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC****A / LÝ THUYẾT**

- $\sqrt{f(x)}$ có nghĩa khi $f(x) \geq 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ có nghĩa khi $g(x) \neq 0$
- Hàm số $y = \tan x$ xác định khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cot x$ xác định khi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $-1 \leq \sin x \leq 1$; $0 \leq \sin^2 x \leq 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$; $0 \leq \cos^2 x \leq 1$
- $0 \leq |\sin x| \leq 1$; $0 \leq |\cos x| \leq 1$
- $0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1$; $0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1$

B/ BÀI TẬP :**1/ Tìm tập xác định của các hàm số sau :**

a/ $y = \cos \frac{4x-1}{x^2-2x-3}$

h/ $y = \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 5x$

b/ $y = \sin \sqrt{2-5x}$

i/ $y = \cot(3x+2)$

c/ $y = \tan 5x + 3x$

j/ $y = \frac{x+2}{\tan x}$

d/ $y = 7 - \cot 4x$

k/ $y = \frac{\sin x + 5}{\cos^2 x + \cos x - 2}$

e/ $y = \frac{3x - \sin x}{4\cos x}$

l/ $y = \frac{2}{\sqrt{1 - \sin x}}$

$$f/ \quad y = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$$

$$m/ \quad y = \frac{x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

$$g/ \quad y = \frac{2 - \sin x}{\cos x + 3}$$

$$n/ \quad y = \sqrt{\frac{\sin x + 3}{\cos x + 1}}$$

$$o/ \quad y = \tan x + \cot x$$

$$p/ \quad y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$$

$$q/ \quad y = \frac{5x}{\tan x - 1}$$

$$r/ \quad y = \frac{1}{\sin 2x} - \frac{3}{\cos x}$$

2/ Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau :

$$a / y = 3 \cos x + 8$$

$$g / y = 9 - 2 \sin^2 5x$$

$$b / y = 5 \sin 6x - 2$$

$$h / y = 4 - \sqrt{3 + \cos^2 x}$$

$$c / y = 4 \cos^2 x + 1$$

$$i / y = 4 \sin x \cos x + 5$$

$$d / y = 7 \sin^2 3x - 4$$

$$j / y = 1 - \sin^2 x \cos^2 x$$

$$e / y = 8 - \sin 5x$$

$$k / y = \cos^2 x - 3 \cos x$$

$$f / y = 1 - 4 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$l / y = \sin^2 x + 2 \sin x - 3$$

$$m/ \quad y = 2 - 3\sqrt{\cos x}$$

$$n/ \quad y = 4|\sin 2x| - 1$$

Bài 2 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN.

A / LÝ THUYẾT :

Biến đổi các pt về dạng cơ bản sau :

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

***Chú ý :** Nếu không đưa được về cung quen α thì dùng các kí hiệu **arcsina, arccosa, arctana, arccota.**

***Ghi nhớ :**

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

***Biến đổi đặc biệt :**

$$a / \sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)$$

$$e / \cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$b / \tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v)$$

$$f / \tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$c / \cot u = -\cot v \Leftrightarrow \cot u = \cot(-v)$$

$$g / \cos u = -\sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

$$d / \cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)$$

$$h / \tan u = -\cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

B/ BÀI TẬP:**Bài 1/ Giải các phương trình sau :**

$$a / 2 \sin x - 1 = 0$$

$$b / 2 \cos 2x + \sqrt{2} = 0$$

$$c / 3 \sin 9x + 1 = 0$$

$$d / 3 \cos x - 4 = 0$$

$$e / \tan(x-1) = 5$$

$$f / 3 \cot\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}$$

$$g / 2 \cos(4x + 20^\circ) + \sqrt{3} = 0$$

$$h / 2 \sin(80^\circ - 7x) - 1 = 0$$

$$i / 3 \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$$

$$j / 4 \cot(2x - 16^\circ) + 7 = 0$$

$$k / 2 \sin 5x + \sqrt{3} = 0$$

$$l / 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2} = 0$$

$$m / 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$$

$$n / 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5} - 4x\right) - \sqrt{2} = 0$$

2/ Giải các phương trình sau :

$$a / \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 4x\right) = 0$$

$$c / \tan x + \tan 2x = 0$$

$$b / \sin(1 - 2x) + \sin(3x + 4) = 0$$

$$d / \cos(2^\circ - 5x) + \cos(4x - 14^\circ) = 0$$

$$e / \tan 3x - \cot x = 0$$

$$g / \tan x + \cot x = 0$$

$$f / \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = 0$$

$$h / \tan 2x \cdot \tan 3x = 1$$

3/ Giải các phương trình sau :

$$a / \sin x \cos x - 3 \sin 2x = 0$$

$$f / \sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

$$b / 2 \sin x + \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$g / \sin^2 5x - \cos^2 x = 0$$

$$c / \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8} \sin 5x$$

$$h / \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$d / \sin^2 x - \frac{1}{4} = 0$$

$$i / \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$$

$$e / \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

$$j / \sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \cos^2 x$$

$$k / \cos 2x \cos x + \sin x \cos 3x = \sin 2x \sin x - \sin 3x \cos x$$

Bài 3

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

A/ PHƯƠNG PHÁP:

Dạng :

$$a \cdot \sin^2 u + b \cdot \sin u + c = 0 \quad (1)$$

$$a \cdot \cos^2 u + b \cdot \cos u + c = 0 \quad (2)$$

$$a \cdot \tan^2 u + b \cdot \tan u + c = 0 \quad (3) \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

$$a \cdot \cot^2 u + b \cdot \cot u + c = 0 \quad (4)$$

Cách giải :

- Đối với dạng (1), (2) thì đặt $t = \sin u$, $t = \cos u$ (điều kiện $-1 \leq t \leq 1$).

- Đối với dạng (3), (4) thì đặt $t = \tan u$, $t = \cot u$.

$\Rightarrow$ Đưa pt về dạng $at^2 + bt + c = 0$, giải tìm t, tìm u.

B/ BÀI TẬP:

1/ Giải các phương trình sau :

$$a / 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$e / 6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$$

$$b / \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$f / 5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$$

$$c / \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$g / \frac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2 \tan^2 x$$

$$d / 3 \cot^2 x - 4 \cot x = 0$$

$$h / \cos 2x + 3 \sin x = 2$$

$$i / 2 \cos 2x - 8 \cos x + 5 = 0$$

$$l / \cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$j / 4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7$$

$$m / 2 + \cos 2x = -5 \sin x$$

$$k / 2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$n / \cos 2x + 2 \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

2/ Giải các phương trình sau :

$$a / 4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cos x - \sqrt{6} = 0$$

$$i / 3 \tan x + \sqrt{3} \cot x - 3 - \sqrt{3} = 0$$

$$b / 4 \sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1) \sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$j / \frac{3}{\cos x} = 3 + 2 \tan^2 x$$

$$c / 2 \cos^2 x - 4 \cos x - \sin^2 x + 2 = 0$$

$$k / 4 \sin^5 x \cdot \cos x - 4 \cos^5 x \cdot \sin x = \sin^2 4x$$

$$d / \cos 2x + \sin^2 x + 2 \cos x + 1 = 0$$

$$l / 4 \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) - 4 \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) = 7$$

$$e / 6 \sin^2 3x + \cos 12x - 4 = 0$$

$$f / \sin \left(\frac{x}{2} \right) + \cos x = 1$$

$$m / \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$g / \frac{3}{\cos^2 x} - \tan x - 7 = 0$$

$$n / \cos 5x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 1$$

$$h / \cos 2x - 3 \cos x - 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 2 = 0$$

Bài 4

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

ĐỐI VỚI SINU VÀ COSU.

A/ PHƯƠNG PHÁP:

Dạng :

$$a \cdot \sin u + b \cdot \cos u = c \quad (1) \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 \neq 0)$$

Cách giải :

Chia 2 vế của pt cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \cdot \sin u + \sin \alpha \cdot \cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{với } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})$$

$$\Leftrightarrow \sin(u + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

***Điều kiện :** pt (1) có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

B/ BÀI TẬP:

1/ Giải các phương trình sau :

$$a / \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$f / \cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3} (\cos 5x - \sin 7x)$$

$$b / \sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$$

$$g / 4 \sin x + \cos x = 4$$

$$c / \sqrt{2} \sin 2x - \sqrt{6} \cos 2x = -2$$

$$h / 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$$

$$d / 3 \sin 7x + 4 \cos 7x = 5$$

$$k / \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 3x$$

$$e / \sqrt{3} \sin 5x - \cos 5x = 2 \sin 3x$$

$$l / 2 \sin 6x + \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 0$$

2/ Giải các phương trình sau :

$$a / 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$$

$$b / 2(\cos x - 1) \sin x = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$c / \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{2} (\sin x + \cos x)$$

$$d / 2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x + 2 \cos^2 2x = \sqrt{3} + 1$$

$$e / \sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$$

Bài 5**PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC HAI****ĐỐI VỚI SINU VÀ COSU.****A/ PHƯƠNG PHÁP:**

Dạng: $a \cdot \sin^2 u + b \cdot \sin u \cos u + c \cdot \cos^2 u = d \quad (1)$

(Với $a, b, c \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

Cách giải :

✓ **Cách 1 :**

$$\oplus \text{ Xét TH : } \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(1) \Leftrightarrow a = d \text{ (đúng thì nhận, sai thì loại nghiệm } u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\oplus \text{ Xét TH : } \cos u \neq 0 \Leftrightarrow u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Chia 2 vế của pt (1) cho $\cos^2 u$, đưa pt về dạng :

$$A \cdot \tan^2 u + B \cdot \tan u + C = 0$$

***Chú ý :** $\frac{d}{\cos^2 u} = d(\tan^2 u + 1)$

✓ **Cách 2 :** Dùng công thức hạ bậc và công thức nhân đôi

$$\bullet \sin u \cos u = \frac{\sin 2u}{2}$$

$$\bullet \sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\bullet \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

Đưa pt (1) về dạng $A.\sin 2u + B.\cos 2u = C$.

B/ BÀI TẬP:

Giải các phương trình sau :

$$a / 2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - \cos^2 x = -2$$

$$b / 4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4$$

$$c / 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$$

$$d / 6 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = 1$$

$$e / 4 \cos^2 \frac{x}{2} + 4 \sin x + 3 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$f / \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 3 \cos^3 x = 0$$

$$g / 4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x - \sin^2 x \cos x = 0$$

$$h / 3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 3$$

$$k / 3 \sin^2 2x - \frac{\sin 4x}{2} - 4 \cos^2 2x = 2$$

$$m / \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 3 \cos^3 x = 0$$

Bài 6

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

ĐỐI VỚI SINU VÀ COSU.

A/ PHƯƠNG PHÁP:

Dạng: $a(\sin u + \cos u) + b.\sin u \cos u + c = 0$

Cách giải :

$$\text{Đặt } t = \sin u + \cos u = \sqrt{2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Với đk : } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin u \cos u = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Thế vào pt ta được pt dạng : $At^2 + Bt + C = 0$. Giải tìm t , $\Rightarrow u$.

***Chú ý :** Pt dạng $a(\sin u - \cos u) + b \sin u \cos u + c = 0$, giải tương tự bằng cách đặt :

$$t = \sin u - \cos u = \sqrt{2} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin u \cos u = \frac{1 - t^2}{2}, \text{ đk : } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

B/ BÀI TẬP:

Giải các phương trình sau :

$$a / 3(\sin x + \cos x) + 4 \sin x \cos x + 3 = 0$$

$$f / \sin 2x - 12(\cos x - \sin x) + 12 = 0$$

$$b / \sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$$

$$g / \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - \sin x - 1 = 0$$

$$c / \cos x - \sin x - 2 \sin 2x - 1 = 0$$

$$h / 1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$$

$$d / 2(\sin x + \cos x) = 2 \sin 2x + 1$$

$$e / \sin 2x + \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Bài 7 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC.

A/ PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng các phép biến đổi sau để đưa pt về các dạng đã biết cách giải:

$$a / \text{PT tích : } A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

b/ **Tổng 2 số không âm :**

$$\begin{cases} A \geq 0 \text{ \& } B \geq 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

c/ **Hai vế bị chặn :**

$$\bullet \begin{cases} A \leq M \\ B \geq M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M \end{cases} \quad \bullet \begin{cases} A \leq M \\ B \leq N \\ A + B = M + N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} |A| \leq 1 \\ |B| \leq 1 \\ AB = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 1 \\ A = B = -1 \end{cases}$$

B/ BÀI TẬP:

1/ Giải các phương trình sau :

a / $\sin 2x - 2 \cos x = 0$

f / $\sin 3x + \sin x - 2 \cos x = 0$

b / $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

g / $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 - \sin x = 0$

c / $\cos 3x - \cos 4x + \cos 5x = 0$

h / $\sin 2x \cdot \sin 5x = \sin 3x \cdot \sin 4x$

d / $\cos 4x + \sin \frac{9x}{2} - \cos 5x = 0$

k / $\sin^2 x + \sin^2 3x = 2 \sin^2 2x$

e / $\sin 5x + \sin x - 1 = -2 \sin^2 x$

l / $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$

2/ Giải các phương trình sau :

a / $\sin 2x + \cos x = 1 + 2 \sin x$

h / $\sin 4x \cdot \sin 2x + \sin 9x \cdot \sin 3x = \cos^2 x$

b / $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 1 = \cos x$

k / $\sin 4x - \cos x + 2 = \cos 3x + 4 \sin x$

c / $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

l / $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

d / $\tan 2x - 2 \tan x = 0$

e / $2 \tan x + \cot x = 2 \sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$

m / $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

f / $\sin^6 x + \cos^6 x = 4 \cos^2 2x$

n / $(2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 3) = 4 \sin^2 x - 1$

g / $2 \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \sin x) + \cos^2 x = 0$

o / $(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 2 \sin x + 1) = 3 - 4 \sin^2 x$

3/ Giải các phương trình sau :

a / $\sin 4x \cdot \cos 16x = 1$

b / $\sin x \cdot \cos 2x = 1$

c / $\sin^2 x - 2 \sin x + 2 = \sin^2 3x$

d / $4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 0$

e / $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \cdot \sin 2x$

f / $5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3$

CHƯƠNG II**TỔ HỢP – XÁC SUẤT.****Bài 1****QUY TẮC ĐẾM.****A/ LÝ THUYẾT :****1/ Quy tắc cộng :**

Một công việc có thể hoàn thành theo 2 phương án A và B. Có m cách thực hiện phương án A, có n cách thực hiện phương án B. vậy có **m+n** cách hoàn thành công việc.

2/ Quy tắc nhân :

Một công việc có thể hoàn thành phải bao gồm cả 2 công đoạn A và B. Có m cách thực hiện công đoạn A, có n cách thực hiện công đoạn B. vậy có **m.n** cách hoàn thành công việc.

B/ BÀI TẬP :

- 1) Một hộp đựng 10 viên bi trắng, 8 viên bi xanh và 2 bi đỏ. Một bé lớp 5 muốn lấy ra 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?
- 2) Một đội văn nghệ có 8 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi saong ca nam nữ?
- 3) Trong một hộp có 2 tấm thẻ đỏ được đánh số lần lượt là 1, 2 và 3 tấm thẻ trắng được ghi chữ lần lượt là a, b, c. Có mấy cách lấy ra 2 tấm thẻ
 - a/ Cùng màu ?
 - b/ Khác màu ?
- 4) Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu
 - a/ Mật khẩu tài khoản gồm 4 chữ số ?
 - b/ Mật khẩu tài khoản gồm 4 chữ số khác nhau ?
 - c/ Số tự nhiên gồm 4 chữ số ?
 - d/ Số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau ?
- 5) Từ các chữ số 1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu
 - a/ Số tự nhiên lẻ gồm 3 chữ số ?
 - b/ Số tự nhiên lẻ gồm 3 chữ số khác nhau ?
- 6) Từ các chữ số 0, 1,2,3,4 có thể lập được bao nhiêu
 - a/ Số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số ?
 - b/ Số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau ?
- 7) Từ các chữ số 0, 1,2,3,4 có thể lập được bao nhiêu
 - a / Số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau trong đó phải có mặt chữ số 3 ?
 - b/ Số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau trong đó không có mặt chữ số 3 ?

- 8) Từ các chữ số 1,2,3,4, 5,6,7,8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và không bắt đầu bằng 123 ?
- 9) Từ các chữ số 1,2,3,4, 5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau và chia hết cho 3?
- 10) Từ các chữ số 1,2,3,4, 5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?
- 11) Từ các chữ số 0,1,2,3,4, 5,6,7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau và một trong ba chữ số đầu tiên phải là chữ số 1 ?
- 12) Từ các chữ số 0,1,2,3,4, 5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau, trong đó luôn có mặt chữ số 1 và chữ số hàng nghìn là 2 ?

Bài 2 HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP.

A/ LÝ THUYẾT :

***Giai thừa :**

Cho $n \in N$, n giai thừa được xác định :

$$n! = n(n-1)(n-2)....1$$

Như vậy :

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \end{aligned}$$

1/ Hoán vị :

Một tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi một cách sắp xếp n phần tử này **theo thứ tự** được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Số lượng các hoán vị của n phần tử được kí hiệu là P_n và được xác định :

$$P_n = n!$$

2/ Chỉnh hợp :

Một tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi một cách lấy ra k phần tử và sắp xếp chúng **theo thứ tự** được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Số lượng các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là A_n^k và xác định :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1 \leq k \leq n)$$

Như vậy : $A_n^k = n(n-1)....(n-k+1)$

3/ Tổ hợp :

Một tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi một **tập hợp con** của A gồm k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là C_n^k và xác định :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

*Tính chất :

$$\bullet C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$\bullet C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$$

B/ BÀI TẬP :**1/ Giải các pt sau :**

$$a / P_2 x^2 - P_3 x = 8$$

$$g / 12C_n^{n-3} - 5C_n^2 = 70$$

$$b / A_n^3 = 20n$$

$$h / 2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$$

$$c / C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = 5x$$

$$i / A_n^2 + 6C_n^3 = 28n^2 + 17n - 480$$

$$d / A_n^3 + 5A_n^2 = 2n + 30$$

$$j / A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$$

$$e / A_n^3 + 2C_n^2 = 16n$$

$$k / 3A_n^2 + nP_2 = 4A_n^2$$

$$f / 3A_n^2 + 5C_n^3 = n^3 - n^2$$

$$l / C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = 9n^2 - 14n$$

2/ Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

a/ Gồm 4 chữ số khác nhau ?

b/ Gồm 4 chữ số khác nhau và phải chứa chữ số 1 ?

c/ Gồm 4 chữ số khác nhau và phải chứa chữ số 2 và 5 ?

3/ Từ một hộp đựng 5 viên bi xanh và 7 viên bi vàng (các viên bi có kích thước khác nhau) có bao nhiêu cách lấy ra

a/ 4 viên bi bất kì ?

b/ 4 viên bi cùng một màu ?

c/ 4 viên bi trong đó có 1 viên màu xanh và 3 viên màu vàng ?

d/ 4 viên bi trong đó có ít nhất 2 viên màu vàng ?

4/ Một đội xây dựng gồm 10 công nhân và 3 kỹ sư. Có bao nhiêu cách lập một tổ công tác có 1 kỹ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên ?**5/ Một hộp đựng 4 quả cầu màu đỏ, 5 quả cầu màu trắng và 6 quả cầu màu xanh (kích thước các quả cầu khác nhau). Có bao nhiêu cách lấy ra**

a/ 4 quả cầu sao cho có đúng 2 quả cầu màu đỏ ?

b/ 4 quả cầu sao cho số quả cầu màu đỏ và số quả cầu màu xanh bằng nhau ?

c/ 4 quả cầu sao cho có ít nhất 2 quả cầu màu trắng ?

d/ 4 quả cầu sao cho có đủ cả ba màu ?

6/ Có bao nhiêu cách chia một nhóm gồm 9 học sinh thành 3 nhóm có 2,3,4 học sinh ?

7/ Có bao nhiêu cách sắp xếp một nhóm học sinh gồm 4 nam và 3 nữ ngồi thành một hàng sao cho

a/ Ngồi tùy ý ?

b/ Nam và nữ xen kẽ ?

c/ Nam ngồi kề nhau và nữ ngồi kề nhau ?

d/ Chỉ có nữ ngồi kề nhau ?

8/ Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn A, B, C, D, E ngồi vào một ghế dài sao cho

a/ Bạn C ngồi chính giữa ?

b/ Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ?

9/ Trong phòng học có hai cái bàn dài , mỗi bàn có năm ghế. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ

a/ Ngồi tùy ý ?

b/ Sao cho nam ngồi một bàn và nữ ngồi một bàn ?

10/ Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau mà hai chữ số 1 và 4 không đứng cạnh nhau ?

11/ Có sáu học sinh nam và ba học sinh nữ xếp hàng dọc đi vào lớp. Có bao nhiêu cách xếp để có đúng hai học sinh nam đứng xen kẽ ba học sinh nữ ?

12/ Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau và chia hết cho 10 ?

13/ Có bao nhiêu số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau sao cho chữ số hàng nghìn chia hết cho 3 và phải có mặt chữ số 0 ?

Bài 3

NHỊ THỨC NEWTON.

A/ LÝ THUYẾT :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Số hạng tổng quát có dạng :

$$C_n^k a^{n-k} b^k \quad (k \in N, k \leq n)$$

$$\bullet C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$\bullet C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

$$\bullet C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$$

B/ BÀI TẬP:

1/ Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu – ton :

$$a / (2x + \sqrt{3})^4 \quad b / (4 - m)^6 \quad c / (2a + 3b)^5 \quad d / \left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^4$$

2/ Tìm hệ số của x^4 và hệ số tự do trong khai triển của $\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x}\right)^{12}$.

3/ Tìm hệ số của $\frac{1}{x^{14}}$ trong khai triển của $\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^{18}$.

4/ Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của $(x+1)^n$, biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển bằng 1024.

5/ Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển của $\left(\frac{2}{x^4} - 3x\right)^{10}$.

6/ Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(4x - \frac{1}{x^3}\right)^{2008}$.

7/ Tìm hệ số của $\frac{1}{x^{28}\sqrt{x}}$ trong khai triển của $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^3}\right)^{48}$.

Bài 4 BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ.

A/ LÝ THUYẾT :

$$\bullet P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$\bullet 0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

$$\bullet \bar{A} = \Omega \setminus A \text{ là biến cố đối của } A.$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

B/ BÀI TẬP :

1/ Gieo một đồng tiền rồi gieo tiếp con súc sắc .

a/ Mô tả không gian mẫu.

b/ Tính xác suất của các biến cố sau :

A : “Đồng tiền xuất hiện mặt sấp”

B : “Con súc sắc xuất hiện mặt có 5 chấm”

2/ Một hộp đựng 4 quả cầu xanh và 7 quả cầu đỏ (kích thước khác nhau). Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để được đúng một quả cầu xanh.

3/ Khối 12 có 9 học sinh giỏi, khối 11 có 10 học sinh giỏi, khối 10 có 3 học sinh giỏi. Chọn ngẫu nhiên 2 trong các học sinh đó. Tính xác suất để cả 2 học sinh được chọn từ cùng một khối.

4/ Một hộp chứa 4 bi đỏ, 5 bi trắng, 6 bi xanh (kích thước khác nhau). Lấy ra ngẫu nhiên 4 viên bi .Tính xác suất sao cho trong 4 viên bi lấy ra

a/ Có đúng 2 bi xanh.

b/ Số bi đỏ và bi trắng bằng nhau.

c/ Có ít nhất 2 bi đỏ .

d/ Có nhiều nhất 3 bi trắng.

e/ Không có đủ ba màu .

f/ Có đủ cả ba màu.

5/ Một hộp chứa 10 bi đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 20 bi xanh được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất sao cho 3 viên bi lấy ra

a/ Ghi số lẻ.

b/ Màu đỏ.

c/ Màu đỏ và ghi số lẻ.

d/ Màu xanh hoặc ghi số chẵn.

6/ Một nhóm học sinh gồm 10 nam và 8 nữ. Chọn ngẫu nhiên 6 học sinh để tham gia văn nghệ. Tính xác suất sao cho trong 6 học sinh chọn ra

a/ Có nhiều nhất 2 nữ.

b/ Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ.

7/ Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để

a/ Tích nhận được là số lẻ.

b/ Tích nhận được là số chẵn.

8/ Bốn khẩu pháo cao xạ A,B,C,D cùng bắn độc lập vào một mục tiêu. Biết xác suất bắn trúng của các khẩu pháo trên tương ứng là $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{4}{5}$, $P(D) = \frac{5}{7}$.

Tính xác suất để mục tiêu bị trúng đạn.

Chương III

DÃY SỐ - CẤP SỐ.

Bài 1

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP.

A/ LÝ THUYẾT :

Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

B1 : Kiểm tra $P(n)$ đúng với $n=1$.

B2: Giả thiết $P(n)$ đúng tới $n=k$ ($k \geq 1$)

B3: Chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k+1$ (vận dụng giả thiết quy nạp ở B2)

B4: Kết luận $P(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

***Chú ý :** Nếu bài toán yêu cầu chứng minh $P(n)$ đúng $\forall n \geq p$ thì B1 ta kiểm tra với $n = p$, B2 thì điều kiện $k \geq p$.

B/ BÀI TẬP :

1/ Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$a / 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b / 2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = n(n+1)$$

$$c / 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$d / 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$e / 1.4 + 2.7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$$

$$f / \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2/ Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a/ n(n+1) : 2$$

$$d/ (n^3 + 11n) : 6$$

$$b/ (n+1)(n+2)(n+3) : 6$$

$$e/ (13^n - 1) : 6$$

$$c/ (n^3 + 2n) : 3$$

$$f/ (4^n + 15n - 1) : 9$$

3/ Chứng minh :

$$a/ 2^n > 2n + 1 \quad (\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N})$$

$$b/ 1.2.3 \dots n > 2^{n-1} \quad (\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N})$$

$$c/ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 2

DÃY SỐ.

A/ LÝ THUYẾT :

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **tăng** nếu $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **giảm** nếu $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn trên** nếu có số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn dưới** nếu có số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn** nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới ,

nghĩa là có số M và m sao cho $m \leq n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B/ BÀI TẬP :

1/ Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$.

a/ Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số trên.

b/ Chứng minh dãy số trên là dãy số tăng và bị chặn.

2/ Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{n}{n+1} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

3/ Cho dãy số (u_n) :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

a/ Tìm 6 số hạng đầu tiên của dãy số.

b/ Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Bài 3

CẤP SỐ CỘNG .

A/ LÝ THUYẾT :

Cho (u_n) là CSC

- $u_{n+1} = u_n + d, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- $u_n = u_1 + (n-1)d, \quad \forall n \geq 2$
- $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \quad \forall n \geq 2$
- Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, ta có :

$$\begin{aligned} S_n &= nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \\ &= \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \end{aligned}$$

B/ BÀI TẬP:

1/ Tìm công sai d của CSC (u_n) biết :

a/ $u_1 = 2$ và $u_{10} = 29$

b/ $u_1 = 5$ và $u_{12} = -17$

2/ Tìm số hạng đầu và công sai d của CSC biết :

a/ $\begin{cases} u_4 = 13 \\ u_9 = 28 \end{cases}$

e/ $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} 2u_5 - 7u_9 = 14 \\ 3u_2 + 6u_8 = -1 \end{cases}$

f/ $\begin{cases} a_7 - a_3 = 8 \\ a_2 \cdot a_7 = 75 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} u_1 + u_5 = 10 \\ S_4 = 16 \end{cases}$

g/ $\begin{cases} S_3 = 21 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 155 \end{cases}$

d/ $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \frac{45}{2} \end{cases}$

3/ Tìm 3 cạnh của một tam giác vuông biết chúng lập thành một CSC và chu vi của tam giác đó là 6a.

4/ Đặt thêm bốn số vào giữa hai số -37 và 3 để có một CSC.

5/ Tìm x để ba số $x^2 + 3x$, x^3 , $3x^2 + 13x$ theo thứ tự đó lập thành một CSC.

6/ Cho CSC (u_n) . Chứng minh :

$$u_n = \frac{u_{n-k} + u_{n+k}}{2}, \quad \forall n > k$$

7/ Cho a, b, c > 0. Chứng minh :

$$a^2, b^2, c^2 \text{ là CSC} \Leftrightarrow \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b} \text{ là CSC}$$

8/ Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một CSC. Chứng minh :

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2$$

9/ Tính tổng : $1+4+7+\dots+148$.

10/ Cho CSC (u_n) có $u_3 + u_{13} = 80$. Tính S_{15} .

Bài 4: CẤP SỐ NHÂN**A. Tóm tắt lý thuyết**

Các công thức cần nhớ

- (u_n) là CSN $\Leftrightarrow u_n = u_{n-1} \cdot q, \forall n \geq 2$
- $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \quad (k \geq 2)$
- $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad (n \geq 2, q \neq 0)$
- $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1)$

Chú ý: a, b, c lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow a \cdot c = b^2$

B. Bài tập

1. Cho cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{8}$, công bội bằng 2. Tính $u_6; u_8$
2. Một cấp số nhân có 6 số hạng. Số hạng cuối là 1, công bội là $\frac{1}{2}$. Tìm số hạng đầu.
3. Tìm u_1 và q biết rằng:

a/ $u_3 = 3; u_5 = 27$

b/ $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_1 = 144 \end{cases}$

d/ $\begin{cases} u_7 - u_4 = -216 \\ u_5 - u_4 = -72 \end{cases}$

e/ $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = -65 \\ u_1 + u_7 = -325 \end{cases}$

4. Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân sau:

a/ $\begin{cases} u_3 = 15 \\ u_5 = 135 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} u_1 + u_6 = 244 \\ u_3 + u_4 = 36 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}$

d/ $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$

1. Xét một cấp số nhân có n số hạng, công bội q , số hạng đầu là u_1 , số hạng cuối u_n và S là tổng các số hạng:
 - a. Tính u_n và S biết: $u_1 = 2; q = 3; n = 5$
 - b. Tính q và S biết: $u_1 = 5; n = 6; u_n = 160$
 - c. Tính u_1 và S biết: $q = 3; n = 4; u_n = 54$

- d. Tính u_1 và u_n biết $q = \frac{1}{2}; n = 6; S = 63$
- e. Tính n và S biết: $q = 3; u_1 = 5; u_n = 10935$
2. Một cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng cuối là 192, công bội là 2. Tính số hạng đầu và tổng của cấp số nhân đó.
3. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết rằng tổng số của chúng là 86 và tích số của chúng là 1728.
4. Tìm x để 3 số $x-1; x+3; 3x+1$ lập thành cấp số nhân.
5. Ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.
- a. Chứng minh rằng: $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$
- b. Định a, b, c biết $a+b+c = 7, a^2 + b^2 + c^2 = 21$
6. Tính các tổng sau:
- a. $S = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 (x \neq -1)$
- b. $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$
- c. $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

CHƯƠNG 4: GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1/DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

A. Tóm tắt lý thuyết.

Giới hạn đặc biệt

- $\lim C = C$, C : hằng số
- $\lim \frac{1}{n} = 0$
- $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0; \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0; \lim \frac{1}{n^k} = 0 (k \in \mathbb{N}^*)$
- Cho dãy số $(u_n), (v_n), \begin{cases} |u_n| \leq v_n, \forall n \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = 0$
- Nếu $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n = 0$

B. Bài tập.

- Chứng minh các dãy số với số hạng tổng quát sau có giới hạn 0

a. $u_n = \frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2}}$

b. $u_n = \frac{1}{n!}$

c. $u_n = \frac{\sin n}{n\sqrt{n+1}}$

2. Chứng minh rằng hai dãy số $(u_n), (v_n)$ có giới hạn 0

$$u_n = \frac{1 + \cos n^2}{2n + 1}; v_n = \frac{n + \sin 2n}{n^2 + n}$$

2/DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

A. Tóm tắt lý thuyết:

1/Định nghĩa: Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$

Viết: $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \rightarrow L$

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

2/Tính chất:

1. $\lim c = c$

2. Giả sử $\lim u_n = L$ thì:

a. $\lim |u_n| = |L|, \lim \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{L}$

b. Nếu $u_n \geq 0, \forall n \Rightarrow L \geq 0, \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$

3. Giả sử $\lim u_n = L, \lim v_n = M$, và c là hằng số thì:

1. $\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$

2. $\lim u_n \cdot v_n = L \cdot M$

3. $\lim cu_n = c \cdot L$

4. $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M} (M \neq 0)$

4. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

Nếu cấp số nhân có $|q| < 1$ thì:

$$S = u_1 + u_1 q + \dots + u_1 q^{n-1} + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

B. Bài tập:

1. Tìm $\lim u_n$:

$$\text{a/} \lim \frac{6n-1}{3n+2}$$

$$\text{b/} \lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$$

$$\text{c/} \lim \frac{n^2+2n+3}{2(n+1)^2}$$

$$\text{d/} \lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$$

$$\text{e/} \lim \sqrt{\frac{n^6+3n^3-3}{2n^6+n^5+2}}$$

$$\text{f/} \lim \frac{3^n+5 \cdot 4^n}{4^n+2^n}$$

$$\text{g/} \lim \frac{7 \cdot 2^n+4^n}{2 \cdot 3^n+4^n}$$

$$\text{n/} \lim \frac{n^3-n^2-1}{2n^4-n^2+7}$$

3/ DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

A. Tóm tắt lý thuyết.

Giới hạn đặc biệt:

$\lim n^k = +\infty$, k nguyên dương

$\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

Quy tắc tìm giới hạn vô cực:

a/ Quy tắc 1:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n \cdot v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

b/ Quy tắc 2:

$\lim u_n$	$\lim v_n = L \neq 0$ Dấu của L	$\lim(u_n \cdot v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

c/ Quy tắc 3:

$\lim u_n = L \neq 0$ Dấu của L	$\lim v_n = 0$ Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

B. Bài tập.

1. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) sau với:

$$a/ u_n = -n^4 - 50n + 11$$

$$b/ u_n = \sqrt[3]{7n^2 - n^3}$$

$$c/ u_n = \sqrt{5n^2 - 3n + 7}$$

$$d/ u_n = \sqrt{2n^3 + n^2 + 7}$$

2. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

$$a/ u_n = \frac{3n - n^3}{2n + 15}$$

$$b/ u_n = \frac{\sqrt{2n^4 - n^2 + 7}}{3n + 5}$$

$$c/ u_n = \frac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}}$$

$$d/ u_n = \frac{(2n+1)(1-3n)}{\sqrt[3]{n^3 + 7n^2 - 5}}$$

$$e/ u_n = \frac{3^n - 11}{1 + 7 \cdot 2^n}$$

$$f/ u_n = \frac{2^{n+1} - 3 \cdot 5^n + 3}{7 \cdot 4^n + 3 \cdot 2^n}$$

4/ BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1: Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim \frac{7n^2 - 5n + 1}{2n^2 + 4}$$

$$2) \lim \frac{3n^2 - 7n + 5}{(2n+1)(3n+4)}$$

$$3) \lim \frac{(n^2 + 1)(n-1)^2}{(n+1)(2n+3)^3}$$

$$4) \lim \frac{2n+1}{3n^2 + n}$$

$$5) \lim \frac{4n^3 + 2n - 1}{3n^2 + n}$$

$$6) \lim \frac{3n-1}{n^2 - n + 3}$$

$$7) \lim \frac{2n^2 - 3n + 5}{5n^2 + 3n - 4}$$

$$8) \lim \frac{1 - 2n^2}{3n^2 + 2n + 1}$$

$$9) \lim \frac{(n^2 + 1)(n-1)^2}{(n+1)(3n-2)^3}$$

$$10) \lim \frac{\sqrt[3]{8n^3 + n}}{n+2}$$

$$11) \lim \frac{n\sqrt{n^2} - 3}{5n^2 + 1}$$

$$12) \lim \frac{(n^2 + 1)(n-3) + n^3 - 2}{(2n^2 + 1)(3-n)}$$

$$13) \lim \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n-3)}$$

$$15) \lim \frac{n(3n^2-2)(4n^3+5)}{(2n^2-3)^3}$$

$$17) \lim \frac{(n^2-n-6)(3n+4)}{2n(4+n-n^2)}$$

$$19) \lim \frac{4n^4-n^2+1}{(2n+1)(3-n)(n^2+2)}$$

$$14) \lim \frac{2n^2-n+4}{\sqrt{2n^4-n^2}+1}$$

$$16) \lim \frac{2n^2-2\sqrt{n}+8}{-n^2+3\sqrt{n}-7}$$

$$18) \lim \frac{(2n+1)(n-1)(3n-4)}{(6n+1)^3}$$

$$20) \lim \frac{(2n^2+1)^3(n-1)^5}{3(n+1)^9(3n-2)^2}$$

Bài 2: Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim(\sqrt{n^2+2n}-n)$$

$$3) \lim(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-3n+3})$$

$$5) \lim(\sqrt{n^2-3n}-n+5)$$

$$7) \lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)$$

$$9) \lim(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$$

$$2) \lim(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})$$

$$4) \lim(\sqrt{4n^2+4}-\sqrt{n^2+3})$$

$$6) \lim(2n-1-\sqrt{4n^2-6n+7})$$

$$8) \lim(\sqrt{2n}-\sqrt{2n^2+3n-5})$$

$$10) \lim \frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$$

Bài 3: Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-2n+1)$$

$$3) \lim n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$$

$$2) \lim n(\sqrt[3]{n^3+1}-n)$$

$$4) \lim \frac{n(\sqrt[3]{2-n^3}+n)}{\sqrt{n^2+1}-n}$$

Bài 4: Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim \frac{4^n+1}{4^n-1}$$

$$3) \lim \frac{4 \cdot 3^n + 5^{n+1}}{3 \cdot 2^n + 5^n}$$

$$5) \lim \frac{2^{2n+1}-3^n+3}{3 \cdot 2^n + 7 \cdot 4^n}$$

$$2) \lim \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$$

$$4) \lim \frac{7 \cdot 2^n + 4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n}$$

$$6) \lim \frac{3+4^n}{1+3 \cdot 4^n}$$

B.GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN

A. Tóm tắt lý thuyết.

Giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, với C là hằng số
- Với mọi số nguyên dương k ta có
 - a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$
 - b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & (k=2n) \\ -\infty & (k=2n+1) \end{cases}$
 - c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$
 - d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

1. Các định lý về giới hạn hữu hạn:

Định lý 1:

Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M, (L, M \in \mathbb{R}), c = \text{const}$$

thì:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
- c) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M; \lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot L$
- d) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Định lý 2:

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{L}$
- c) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in J \setminus \{x_0\}$ trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Định lý 3: (Định lý kẹp về giới hạn của hàm số)

Giả sử J là một khoảng chứa x_0 và f, g, h là ba hàm số xác định trên $J \setminus \{x_0\}$. Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in J \setminus \{x_0\}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

Định lý 4: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$

B. Bài tập.

Áp dụng định nghĩa giới hạn hàm số, tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x-2)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 1)$

2. GIỚI HẠN MỘT BÊN

Bài tập

1. Tìm $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (nếu có) của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & (-3 \leq x < 3) \\ 1 & x = 3 \\ \sqrt{x^2-9} & (x > 3) \end{cases}$$

2. Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại x_0

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} & (x > 0) \\ 3 & (x \leq 0) \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & (x < 1) \\ 2-x & (x \geq 1) \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-5x+4}$ tại $x_0 = 1$

3. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & (x < 1) \\ ax+2 & (x > 1) \end{cases}$$

Tìm a để $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ tồn tại

4. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{x^3 + x^2}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2 - x|}{(x - 2)^2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

4) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$

5) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4x^4 - 3}{2x^2 + 3x - 2}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 + 2}}{x^2 - 5x + 4}$

3. GIỚI HẠN VÔ CỰC – CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

A. Tóm tắt lý thuyết

Định lí:

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Quy tắc 1:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \neq 0$ Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Quy tắc 2:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ Dấu của g(x)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

B. Bài tập:

DẠNG 1: Áp dụng trực tiếp các định lý

1. Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + 5x^2 - 10)$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3}{x^2 + 5}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-3)(x-2)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 + x^2 + 3)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 + x + 5}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x)$$

DẠNG 2: Dạng $\left(\frac{0}{0}\right)$

2. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 6x^2 + 3x - 1}{-x^2 + 4x - 3}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 + 8x^3}{6x^2 + 5x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 5x + 6}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 + x^2 + 5x + 3}{2 + 3x - x^3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 7x + 3}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$$

4. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{9 + x} - 3}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3x + 1}}{x^3 - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 9}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{4 - x^2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 3}{x}$$

5. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x^2 - 4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{4x+5} + 1}{x^2 - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$$

DANG 3: Dạng $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

6. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 5}{4x^3 + 5x^2 - x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5}}{x - 3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \sqrt{4x^2}}{1 - 3x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^3 - 4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 + 1)(5 - 3x)}{(x^2 + 3x)(2x + 5)}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^3 - 1)^4 (4x^4 + 3)^2}{(2x^4 - 1)^5}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x - x^3} + 5x}{2x + 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 4x - 1}{1 - 2x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x} - 1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 5x} + x + 1}{3x^2 + 2x + 1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 2x} + 5x - 1}{2x - 1}$$

DANG 4: Dạng $(\infty - \infty)$

7. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \\
 &2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1}) \\
 &3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) \\
 &4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 4x + 3} - 2x - 3) \\
 &5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 3}) \\
 &6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3x - \sqrt{9x^2 - 2x + 1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) \\
 &8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x) \\
 &9) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \\
 &10) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) \\
 &11) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^3} \right)
 \end{aligned}$$

DANG 5: Dạng $(0 \cdot \infty)$

8. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 5} \\
 &2) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(x - 3)^2} \\
 &3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{4x^2 + 1} - x) \\
 &4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x) \sqrt{\frac{3x - 11}{x^3 - 1}} \\
 &5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) \sqrt{\frac{x - 1}{x^3 + x}}
 \end{aligned}$$

DANG 6: Giới hạn hàm lượng giác

9. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \\
 &2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} \\
 &3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2} \\
 &4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} \\
 &5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} \\
 &6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 2x} \\
 &7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \\
 &8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{1 - \cos x} \\
 &9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x + 1} - 1} \\
 &10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 1}}{\sin x} \\
 &11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2} \\
 &12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x}
 \end{aligned}$$

4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. Tóm tắt lý thuyết

Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:

- Bước 1: Tính $f(x_0)$
- Bước 2: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp để tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ta cần tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$)
- Bước 3: So sánh $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ và $f(x_0)$ rồi kết luận

Chú ý: Hàm số không liên tục tại x_0 gọi là gián đoạn tại x_0 .

B. Bài tập

1. Xét tính liên tục của hàm số tại x_0

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} & (x \neq 2) \\ \frac{1}{4} & (x=2) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x+2}{x^3+1} & (x \neq -1) \\ \frac{4}{3} & (x=-1) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = -1$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} & (x \neq 4) \\ \frac{2x-5}{2} & (x=4) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & (x \neq 1) \\ 4 & (x=1) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & (x \neq 2) \\ 3-x & (x=2) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2$$

2. Xét tính liên tục của hàm số tại x_0

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2} & (x > 5) \\ (x-5)^2 + 3 & (x \leq 5) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 5$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x > 1) \\ 1+2\cos(x-1) & (x \leq 1) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & (x > 1) \\ \frac{1}{4} & (x = 1) \\ \frac{x^2-1}{x^2+6x-7} & (x < 1) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1$$

2. Tìm a, b để hàm số liên tục tại x_0

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x} & (x < 0) \\ a + \frac{4-x}{x+2} & (x \geq 0) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+5x-2}{x+2} & (x \neq -2) \\ a & (x = -2) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = -2$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x(x-3)} & (\text{khi } x(x-3) \neq 0) \\ a & (\text{khi } x=0) \\ b & (\text{khi } x=3) \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0, x_0 = 3$$

3. Tìm điểm gián đoạn của hàm số:

$$a) f(x) = \frac{5}{x^3 - x}$$

$$b) f(x) = \frac{x+3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$c) f(x) = \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \neq 0) \\ 2 & (x = 0) \end{cases}$$

4. Xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}$

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} & (x \neq -1) \\ \frac{4}{3} & (x = -1) \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{1 - x} & (x > 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 3x + 2 & (x < 1) \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 4 & (x = 1) \end{cases}$$

5. Chứng minh rằng phương trình sau:

a) $3x^2 + 2x - 2 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm

b) $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên $(-1; 1)$

c) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

d) $x^4 - x - 3 = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1; 2)$ và $x_0 \geq \sqrt[3]{12}$

e) $x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1; 2)$

Chương 5: ĐẠO HÀM

1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Đạo hàm của hàm số tại 1 điểm:

Định nghĩa: Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 , kí hiệu $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, nghĩa là: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Nhận xét:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại x_0

Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm:

Vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (hay vận tốc tại t_0) của một chuyển động có phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại thời điểm t_0 , tức là: $v(t_0) = s'(t_0)$

2. Đạo hàm của hàm số trên 1 khoảng

a. Hàm số f gọi là có đạo hàm trên J nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm $x \in J$

b. Nếu hàm số f có đạo hàm trên J thì hàm số f' xác định bởi

$$f' : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ gọi là đạo hàm của hàm số } f$$

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ cũng được kí hiệu bởi y'

B. Bài tập

Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số tại điểm đã chỉ ra:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ tại $x_0 = 1$

b) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ tại $x_0 = 4$

c) $f(x) = \frac{4x-7}{3-x}$ tại $x_0 = -2$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3}$ tại $x_0 = 0$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tại $x_0 = -2$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 5$ tại $x_0 = 4$

2. DÙNG QUI TẮC ĐỂ TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ**A. CÁC QUI TẮC TÍNH ĐẠO HÀM**

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Đạo hàm hàm số hợp

$$g(x) = f[u(x)] \text{ thì } g'_x = f'_u \cdot u'_x$$

BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

$(c)' = 0$ (c là hằng số) $(x)' = 1$ $(kx)' = k$ $(x^n)' = nx^{n-1} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} (x \neq 0)$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$	$(ku)' = ku'$ $(u^n)' = nu^{n-1}u' (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} (u \neq 0)$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} (u > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\sin u)' = u' \cos u$ $(\cos u)' = -u' \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$ $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$

B. Bài tập

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 6x + 7$

2) $y = (2x^3 + 2)(x^2 + 1)$

3) $y = x^2(2x^3 - 1)(5x^2 + x)$

4) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$

5) $y = \frac{3 - 2x}{x + 7}$

6) $y = \frac{2x - 4}{x + 3}$

7) $y = \frac{2x}{x^2 - 9}$

8) $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x - 1}$

9) $y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 2}$

10) $y = \frac{x^4 + 48}{x}$

11) $y = (x^2 - 4x + 1)^5$

12) $y = (x^7 + 2x^2)^5$

13) $y = (x^3 - \frac{1}{x^3} + 3x)^5$

14) $y = \frac{(2x + 9)^3}{x + 1}$

15) $y = \frac{1}{(x^2 - 3x + 1)^7}$

16) $y = \frac{1}{(x - 5)^2}$

17) $y = \sqrt{2x^2 - 4}$

18) $y = \sqrt{3x^2 - 5x}$

19) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

$$20) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$21) y = x\sqrt{x^2 + 1}$$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = f(x) = 7 \sin x + 8 \cos x$$

$$b) y = f(x) = \frac{\tan x}{x}$$

$$c) y = f(x) = \frac{x}{\sin x} + \frac{\sin x}{x}$$

$$d) y = f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$e) y = f(x) = \cos 7x$$

$$22) y = \sqrt{(25 - x^2)^3}$$

$$f) y = f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

$$g) y = f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$h) y = \sin^2 2x$$

$$k) y = \cos \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

$$l) y = \sqrt{1 + 4 \tan^2 x}$$

Bài 3: Cho hàm số $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$.

Chứng minh: $f'(1) + f'(-1) = -4f(0)$

Bài 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$. Tính $f'(1)$

Bài 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ Giải bất phương trình $f(x) \leq g'(x)$

3. TIẾP TUYẾN

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ có phương trình là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Bài tập:

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

a) Tại điểm $B(-3; 2)$.

b) Tại điểm có hoành độ bằng -1.

c) Tại điểm có tung độ bằng 0.

d) Biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 12.

e) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) : $y = 36x + 2021$

Bài 2: Viết phương trình tiếp tuyến của (C) : $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$

- a) Tại $x_0 = -1$
- b) Biết tiếp tuyến song song với Ox
- c) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$
- d) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$
- e) Biết tiếp tuyến vuông góc với phân giác thứ nhất của mặt phẳng tọa độ

Bài 3: Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

- a) Tại điểm có tung độ bằng $\frac{5}{2}$
- b) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x + y - 3 = 0$
- c) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $-4x + y - 4 = 0$
- d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(2;0)$

Bài 4: Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C)

- a) Tại điểm M có hoành độ bằng 1
- b) Song song với đường thẳng $y = 9x + 2$
- c) Kẻ từ điểm $A(0;1)$
- d) Cùng phương Ox
- e) Có hệ số góc nhỏ nhất

Bài 5: Gọi $(C): y = x^3 - 5x^2 + 2$

Viết phương trình tiếp tuyến (D) của (C) sao cho tiếp tuyến đó:

- a) Tiếp xúc (C) tại điểm A có $x_A = 3$
- b) Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{7}x - 4$
- c) Song song với đường thẳng $y = -3x + 1$
- d) Đi qua điểm B(0;2)

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{2-x+x^2}{x-2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

- a) Tại điểm M(2;4)
- b) Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$
- c) Tại giao điểm của (C) và trục tung.

4.ĐẠO HÀM CẤP HAI**Định nghĩa:**

Cho hàm số f có đạo hàm f' . Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm f và kí hiệu là f'' , tức là $f'' = (f')'$. Khi đó f' còn được gọi là đạo hàm cấp một của hàm số f . Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là y'' .

Bài tập

Bài 1: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 7x$

Bài 2:

a) Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh: $xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = 0$

b) Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$. Chứng minh: $2(y'')^2 = (y-1)y''$

c) Cho hàm số $y = \sqrt{2x+x^2}$. Chứng minh: $y^3 y'' + 1 = 0$

Hết

PHẦN II: HÌNH HỌC

Chương I PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG.**Bài 1 PHÉP TỊNH TIẾN .****A/ LÝ THUYẾT :**

- Đ/n : $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$
- Với $\vec{v}(a;b)$, $M(x;y)$; $M'(x';y')$ ta có biểu thức tọa độ

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$
- Phép tịnh tiến biến :
 - Đường thẳng thành đường thẳng **song song hoặc trùng** với nó.
 - Đường tròn thành đường tròn có **bán kính bằng nhau** $R' = R$.

***Tìm ảnh của đường thẳng (d) : $ax+by+c=0$ (1)**

Gọi (d') là ảnh của d.

Cách 1 : (lấy 2 điểm thuộc đường thẳng)

- Chọn 2 điểm A, B thuộc đường thẳng (d) .
- Tìm ảnh A', B' của A, B .
- Viết pt đường thẳng (d') là đường thẳng đi qua 2 điểm A', B' .

Cách 2 : (dựa vào t/c song song hoặc trùng)

- Do (d') song song hoặc trùng với (d) nên pt của (d') có dạng :

$$ax+by+n=0 \quad (2)$$

- Chọn một điểm $M \in (d)$. Tìm ảnh $M' = T_{\vec{v}}(M)$.
- Thế tọa độ của M' vào pt (2) tìm được n $\Rightarrow$ pt (d') .

Cách 3 : (biểu thức tọa độ)

- Lấy $M(x;y) \in (d)$. Gọi $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M)$. Ta có :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases} (*)$$

- Thế hệ (*) vào pt (1) của đường thẳng (d) $\Rightarrow$ pt (d') .

***Tìm ảnh của đường tròn (C) :**

Cách 1 : (Tìm tâm và bán kính)

- Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn (C).
- Tìm tâm $I' = T_{\vec{v}}(I)$.
- Đường tròn ảnh (C') có tâm I' và bán kính $R' = R$.

Cách 2 : (sử dụng biểu thức tọa độ).

B/ BÀI TẬP :

1/ Cho $\vec{v}(-2;5)$, điểm A(3;-8), điểm B(-4;-1). Tìm ảnh của hai điểm A, B qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

2/ Tìm ảnh của đường thẳng (d): $5x-9y+2=0$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}(3;-5)$.

3/ Tìm ảnh của đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{w}(9;-2)$.

4/ Cho hai điểm M(0;-6), N(-5;1) và đường thẳng (l): $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$. Tìm ảnh của đường thẳng (l) qua phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{MN}$.

5/ Tìm ảnh của đường tròn (T): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}(4;-7)$,

6/ Cho A(-4;9), B(8;2). Tìm ảnh của đường thẳng AB qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{x}(5;-7)$.

7/ Cho I(1;-8), $\vec{a}(4;-3)$. Tìm điểm J sao cho I là ảnh của J qua phép tịnh tiến theo vector $2\vec{a}$.

8/ Cho $\vec{b}(7;2)$, đường thẳng $\Delta: 4x-y+5=0$. Tìm đường thẳng D sao cho Δ là ảnh của D qua phép tịnh tiến theo vector $-5\vec{b}$.

9/ Cho $\vec{c}(-4;9)$, đường tròn (K): $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$. Tìm đường tròn (L) sao cho đường tròn (K) là ảnh của (L) qua phép tịnh tiến theo vector $\frac{2}{3}\vec{c}$.

Bài 2**PHÉP QUAY.****A/ LÝ THUYẾT :**

- Đ/n : Phép quay tâm O, góc quay α biến điểm M thành điểm M'

$$Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$$

- Biểu thức tọa độ khi tâm quay là gốc tọa độ O và góc quay đặc biệt. Gọi M(x;y), $M'(x';y')$.

- góc quay là 90^0 : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$
- góc quay là -90^0 : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$
- góc quay là 180^0 : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

- Phép quay biến :

+ Đường thẳng thành đường thẳng, Đặc biệt khi góc quay là $\pm 90^0$ thì đường thẳng biến thành đường thẳng **vuông góc** với nó ; khi góc quay là 180^0 thì đường thẳng biến thành đường thẳng **song song hoặc trùng** với nó.

+ Đường tròn thành đường tròn có **bán kính bằng nhau** $R' = R$.

B/ BÀI TẬP :

Tìm ảnh của điểm $A(-2;-7)$, đường thẳng $d: 9x-4y+3=0$,

đường tròn (C): $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 16$ qua :

a/ Phép quay tâm O, góc quay là 90^0 .

b/ Phép quay tâm O, góc quay là -90^0 .

c/ Phép quay tâm O, góc quay là 180^0 .

Bài 3

PHÉP VỊ TỰ.

A/ LÝ THUYẾT :

- Đ /n : Phép vị tự tâm I, tỉ số $k \neq 0$ biến điểm M thành điểm M'
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$

- Với tâm vị tự $I(x_I; y_I)$
 , $M(x; y)$, $M'(x'; y')$ ta có biểu thức tọa độ:

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_I \\ y' = ky + (1-k)y_I \end{cases}$$

- Phép vị tự tỉ số k biến :
 - Đường thẳng thành đường thẳng **song song hoặc trùng** với nó.
 - Đường tròn thành đường tròn có **bán kính tỉ lệ nhau** $R' = |k|.R$.

Tìm ảnh của đường thẳng (d) :*Cách 1** : (lấy 2 điểm thuộc đường thẳng)**Cách 2** : (dựa vào t/c song song hoặc trùng)**Cách 3** : (biểu thức tọa độ)***Tìm ảnh của đường tròn (C) :****Cách 1** : (Tìm tâm và bán kính $R' = |k|.R$)**Cách 2** : sử dụng biểu thức tọa độ.**B/ BÀI TẬP :**

1/ Tìm ảnh của điểm A(0;-5) qua phép vị tự tâm I(-3;4), tỉ số 2.

2/ Tìm ảnh của đường thẳng (d): $6x-2y+1=0$ qua phép vị tự tâm B(7;3), tỉ số -4.3/ Tìm ảnh của đường thẳng (D): $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$ qua phép vị tự tâm C(-6;0), tỉ số -7.4/ Tìm ảnh của đường tròn (C) : $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 25$ qua phép vị tự tâm J(-4;-6), tỉ số 9.5/ Tìm ảnh của đường tròn (T) : $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ qua phép vị tự tâm H(0;-5), tỉ số -2.

6/ Tìm điểm A có ảnh là điểm B(-3;2) qua phép vị tự tâm M(4;-1), tỉ số 3.

7/ Tìm đường thẳng (d) có ảnh là đường thẳng (t): $2x-3y+6=0$ qua phép vị tự tâm N(-2;0), tỉ số -5.8/ Tìm đường tròn (C) có ảnh là đường tròn (L) : $(x+9)^2 + (y-3)^2 = 1$ qua phép vị tự tâm P(3;6), tỉ số 7.

9/ Cho tam giác ABC cố định và điểm D nằm trên cạnh BC. Tìm tập hợp trung điểm I của AD khi D di động trên đoạn BC.

Bài 4**PHÉP ĐỒNG DẠNG.****A/ LÝ THUYẾT :**

- Phép đồng dạng có tỉ số k ($k > 0$) biến 2 điểm M, N lần lượt thành 2 điểm M', N' thì :

$$\mathbf{M'N'} = \mathbf{k.MN}$$
- Các phép tịnh tiến, quay, vị tự là các phép đồng dạng.
- Nếu thực hiện liên tiếp 2 phép đồng dạng có tỉ số k và p thì ta được một phép đồng dạng có tỉ số kp .

B/ BÀI TẬP :

1/ Tìm ảnh của điểm $M(5;-2)$ qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}(-1;6)$ và phép quay tâm O , góc quay là 90° .

2/ Tìm ảnh của đường thẳng (d): $3x-y+4=0$ qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép quay tâm O , góc quay là -90° và phép vị tự tâm $I(-3;4)$, tỉ số -2 .

3/ Tìm ảnh của đường tròn (C) : $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 49$ qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(8;-5)$, tỉ số 3 và phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}(2;-9)$.

4/ Tìm ảnh của đường thẳng (d): $2x+5y-1=0$ qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(0;-7)$, tỉ số 3 và phép quay tâm O , góc quay là -90° .

Chương II ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG**TRONG KHÔNG GIAN.****QUAN HỆ SONG SONG.****Bài 1 ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.****Vấn đề 1: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT PHẪNG.**

PP: Tìm 2 điểm chung của 2 mp .Giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 điểm chung đó.

***Chú ý :** Tìm điểm chung của 2 mp bằng cách tìm 2 đường thẳng lần lượt nằm trong 2 mp mà cắt được nhau , tìm giao điểm của 2 đường thẳng đó.

1/ Cho tứ diện ABCD. Gọi I,J lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC.

a/ Tìm giao tuyến của hai mp (IBC) và (JAD).

b/ Gọi M, N là hai điểm lần lượt nằm trên các đoạn AB , AC. Tìm giao tuyến của hai mp (IBC) và (DMN).

2/ Cho hình chóp S.ABCD có AD và BC không song song. Tìm giao tuyến của hai mp :

a/ (SAC) và (SBD)

b/ (SAD) và (SBC)

3/ Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là điểm nằm ở miền trong của tam giác SCD. Tìm giao tuyến của hai mp (SBM) và (SAC).

4/ Cho hình chóp S.ABCD. Lấy I và J trên các đoạn SA và SB sao cho IJ không song song với AB. Lấy điểm K nằm ở miền trong của tứ giác ABCD. Tìm giao tuyến của mp(IJK) lần lượt với các mp (ABCD), (SBC), (SAD).

5/ Cho tứ diện ABCD, hai điểm M và N lần lượt nằm ở miền trong của hai tam giác ABD và ACD. Tìm giao tuyến của hai mp :

a/ (AMN) và (BCD)

b/ (DMN) và (ABC).

6/ Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình thang có đáy lớn là AB. Lấy M trên đoạn SD. Tìm giao tuyến của hai mp :

a/ (MBC) và (SAD)

b/ (MBC) và (SAC).

Vấn đề 2:

XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM CỦA

ĐƯỜNG THẲNG a MẶT PHẪNG(α) .

PP:

Hướng 1 :

- Tìm một đường thẳng b có sẵn trong mp(α) và cắt được a .
- Tìm giao điểm M của 2 đường thẳng a và b.
- Khi đó M chính là giao điểm của của đường thẳng a và mp(α).

Hướng 2: (nhờ mp phụ (β))

- Tìm mp(β) chứa đường thẳng a.
- Tìm giao tuyến b của 2 mp (α) và (β).
- Trong mp(β) , tìm giao điểm M của 2 đường thẳng a và b.
- Khi đó M chính là giao điểm của của đường thẳng a và mp(α)

1/ Cho tứ diện ABCD, hai điểm I và J lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AD (IJ không song song BD). Xác định giao điểm của IJ và mp(BCD).

2/ Cho tứ diện ABCD. Gọi hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm K trên cạnh BD và không trùng với trung điểm của BD. Xác định giao điểm của :

a/ CD với (MNK)

b/ AD với (MNK).

3/ Cho tứ diện S.ABC. Gọi hai điểm I và H lần lượt là trung điểm của SA và AB. Trên đoạn SC lấy điểm K sao cho $KC=3KS$.

a/ Tìm giao điểm của BC và (IHK).

b/ Gọi M là trung điểm của IH. Tìm giao điểm của KM và (ABC).

4/ Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Lấy điểm M tùy ý trên SC, điểm N tùy ý trên BC. Tìm giao điểm của :

a/ AM với (SBD)

b/ SD với (AMN).

5/ Cho tứ diện ABCD. Lấy hai điểm M và N lần lượt nằm trên AC và AD. O là điểm nằm ở miền trong của tam giác BCD. Tìm giao điểm của :

a/ MN và (ABO)

b/ AO và (BMN).

6/ Cho tứ diện ABCD. Lấy hai điểm I và J lần lượt nằm ở miền trong của hai tam giác ABC và ABD. Lấy điểm M tùy ý trên CD. Tìm giao điểm của IJ và (ABM).

7/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a/ Tìm giao điểm I của AM với (SBD). Chứng minh $IA=2IM$.

b/ Tìm giao điểm E của SD với (ABM). Chứng minh E là trung điểm của SD.

8/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AB. Gọi I, J, K là ba điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, AB, BC. Tìm giao điểm của :

a/ IK và (SBD)

b/ SD và (IJK)

c/ SC và (IJK).

9/ Cho tứ diện S. ABC. Gọi hai điểm I và J lần lượt là trung điểm của SA và BC. Gọi M và N là hai điểm tùy ý trên IJ và SC. Tìm giao điểm của :

a/ SM với (ABC)

b/ MC với (SAB)

c/ MN với (ABC).

10/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AB. Lấy M trên cạnh SC (M không là trung điểm của SC). Tìm giao điểm của :

a/ BM với (SAD)

b/ AM với (SBD)

c/ SD với (ABM).

11/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AB. Lấy M là trung điểm của SB, điểm N trên đoạn SC sao cho $3SN=2SC$. Tìm giao điểm của :

a/ BC với (AMN)

b/ CD với (AMN)

c/ SD với (AMN).

12/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trên các đoạn SB, SD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $SB=3BM, SD=3SN$. Tìm giao điểm của :

a/ MN với (SAC)

b/ MN với (ABCD).

Vấn đề 3: CHỨNG MINH 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG.

CHỨNG MINH 3 ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.

1/ Chứng minh 3 điểm thẳng hàng:

Ta chứng minh 3 điểm cùng thuộc 2 mặt phẳng phân biệt (vì cùng thuộc giao tuyến của 2 mp đó).

2/ Chứng minh 3 đường thẳng a, b, c đồng quy :

- Tìm giao điểm M của 2 đường thẳng a và b .
- Tìm 2 điểm I và J trên đường thẳng c .
- Chứng minh 3 điểm M, I, J thẳng hàng.

1/ Cho mp(α) và đường thẳng a cắt mp(α) tại I. trên đường thẳng a lấy 2 điểm A và B khác I. Điểm S nằm trong không gian sao cho SA và SB cắt mp(α) tại J và K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

2/ Cho tam giác ABC nằm ngoài mp(α). giả sử các đường thẳng AB, BC, CA lần lượt cắt mp(α) tại D, E, F. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

3/ Cho hình chóp S.ABCD. Lấy 2 điểm M và N lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD.

a/ Tìm giao điểm J của MN và mp(SAC).

b/ DM cắt AC tại K. Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

4/ Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I và J là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh AD và SB.

a/ Tìm các giao điểm K, L của IJ và DJ với mp(SAC).

b/ AD cắt BC tại O, OJ cắt SC tại M. Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

5/ Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD không song song nhau. Gọi M là trung điểm của SC.

a/ Tìm giao điểm N của SD và mp(ABM).

b/ Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh SO, AM, BN đồng quy.

6/ Cho tứ diện ABCD. Lấy M, N, P lần lượt nằm trên AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I, MP cắt AD tại J. Chứng minh PI, NJ, CD đồng quy.

Vấn đề 4: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN TẠO BỞI MP(α) VÀ HÌNH CHÓP.

PP : Xác định các đoạn giao tuyến của mp(α) với các mặt của hình chóp như sau :

- Tìm mp có điểm chung với (α).
- Tìm giao tuyến của (α) với mặt đã chỉ ra.
- Cho giao tuyến này cắt các cạnh của hình chóp, ta được đoạn giao tuyến.

- Tiếp tục lắp lại với các mặt còn lại của hình chóp cho đến khi các đoạn giao tuyến khép kín lại, tạo thành một đa giác chính là thiết diện cần tìm.

- 1/ Cho tứ diện ABCD. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm M nằm ở miền trong của tam giác BCD sao cho KM cắt CD. Tìm thiết diện của tứ diện ABCD cắt bởi mp(HKM).
- 2/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên CB, CD, SA. Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(MNP).
- 3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Lấy 3 điểm M, N, I lần lượt nằm trên AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(MNI).

TỔNG HỢP.

- 1/ Cho hình chóp S.ABCD. Trong tam giác SCD lấy một điểm M.
- Tìm giao tuyến của hai mp (SBM) và (SAC).
 - Xác định giao điểm của đường thẳng BM và mp(SAC).
 - Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(ABM).
- 2/ Cho hình chóp S.ABCD. Trong tam giác SBC lấy một điểm M, trong tam giác SCD lấy một điểm N.
- Xác định giao điểm của đường thẳng MN và mp(SAC).
 - Xác định giao điểm của đường thẳng SC và mp(AMN).
 - Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(AMN).
- 3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD, OC.
- Tìm giao tuyến của hai mp (MNP) và (SAC).
 - Xác định giao điểm của đường thẳng SA và mp(MNP).
 - Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(MNP).
- 4/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AB. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC. Lấy điểm H trên cạnh CD sao cho $DH=2HC$.

a/ Xác định giao điểm của đường thẳng IK và mp(SBD).

b/ Tìm giao tuyến của hai mp (IHK) và (SAD).

c/ Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(IHK).

5/ Cho hình chóp S.ABCD có 2 cạnh AD và BC không song song. Gọi M là trung điểm của cạnh SA.

a/ Tìm giao tuyến của hai mp (SBC) và (SAD).

b/ Tìm giao điểm N của đường thẳng CM và mp(SBD).

c/ Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(ADN).

6/ Cho hình chóp S.ABCD có 2 cạnh AB và CD không song song. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SC.

a/ Tìm giao tuyến của hai mp (SBD) và (SAC).

b/ Tìm giao điểm của đường thẳng SD và mp(AMN).

c/ Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(AMN).

Bài 2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Vấn đề 1: CHỨNG MINH 2 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG:

- ❖ Chứng minh 2 đường thẳng đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (tính chất đường trung bình, định lí đảo Talets...)
- ❖ Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.
- ❖ Áp dụng định lí về giao tuyến của 3 mặt phẳng và hệ quả.

1/ Cho tứ diện ABCD. Gọi G và H lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh $GH \parallel CD$.

2/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AB. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của cạnh SA và SB.

a/ Chứng minh : $MN \parallel CD$.

b/ Tìm giao điểm P của SC và mp(AND).

c/ AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh $SI \parallel AB$. Tứ giác SABI là hình gì?

3/ Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a/ Chứng minh MNPQ là hình bình hành.

b/ Từ đó suy ra MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

4/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel CD$.

a/ Chứng minh $PQ \parallel SA$.

b/ Gọi K là giao điểm của MN với PQ. Chứng minh $SK \parallel AD$.

5/ Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng.

a/ Chứng minh $CD \parallel EF$.

b/ Gọi M, N lần lượt nằm trên AC và AD sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}$ và H, K lần lượt nằm trên BE và AF sao cho $\frac{FH}{FB} = \frac{FK}{FA} = \frac{2}{3}$.

- Chứng minh $MN \parallel HK$.
- Chứng minh $NK \parallel CE$.

6/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi H và K lần lượt nằm trên SA và SB sao cho $\frac{SH}{SA} = \frac{SK}{SB}$.

a/ Chứng minh : $HK \parallel CD$.

b/ Mp(α) chứa HK và cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Chứng minh HKMN là hình thang.

Vấn đề 2: GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT PHẪNG. THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG.

- Tìm 1 điểm chung M của 2 mp.
- Tìm 2 đường thẳng a và b song song nhau và lần lượt nằm trên 2 mp đó.
- Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung M và song song hoặc trùng một

trong 2 đường thẳng a và b.

1/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mp :

a/ (SAB) và (SCD)

b/ (SAD) và (SBC).

2/ Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tìm giao tuyến của hai mp (BCD) và (DMN).

3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA và SB. Lấy điểm M nằm trên cạnh SC .

a/ Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (HKM) và (SCD).

b/ Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (HKM) và (SAD) trong mỗi trường hợp sau :

- M là trung điểm của SC.
- M không là trung điểm của SC.

4/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H, K, I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Lấy điểm M nằm trên cạnh BC .

a/ Chứng minh HKIJ là hình bình hành.

b/ Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(HKM).

5/ Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N là 2 điểm trên SB và CD. Mp (α) qua MN và song song với SC.

a/ Tìm giao tuyến của mp(α) với các mp (SBC), (SCD), (SAC).

b/ Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD cắt bởi mp(α).

6/ Cho hình chóp S.ABCD. Lấy điểm M trên cạnh AB. Mp(α) là mp qua M và song song với 2 đường thẳng SA, BC. Tìm giao tuyến của mp(α) với các mp (SAB), (ABCD), (SBC).

Bài 3 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG .

1/ Chứng minh đường thẳng a song song với mp(α) bằng cách chứng minh a song song với một đường thẳng b nằm trong mp(α).

2/ Giao tuyến :

- ✓ **TH1** : Nếu 2 mp (α) và (β) có một điểm chung M và mp này chứa một đường thẳng a song song với mp kia thì giao tuyến của chúng đi qua điểm chung M và song song với a.
- ✓ **TH2** : Nếu 2 mp (α) và (β) có một điểm chung M và 2 mp này cùng song song với một đường thẳng a thì giao tuyến của chúng đi qua điểm chung M và song song với a.

1/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

a/ Chứng minh : $MN \parallel (SBC)$, $MN \parallel (SAD)$.

b/ Chứng minh : $SB \parallel (MNP)$, $SC \parallel (MNP)$.

2/ Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD.

a/ Chứng minh : $MN \parallel (BCD)$.

b/ Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ACD. Chứng minh :

$G_1G_2 \parallel (ABD)$, $G_1G_2 \parallel (BCD)$.

3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB, I là trung điểm của AB. Lấy M trên đoạn AD thỏa $AD=3AM$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh :

a/ $NG \parallel (SCD)$

b/ $MG \parallel (SCD)$.

4/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trên SA và BD lần lượt lấy 2 điểm M và N sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{DN}{DB} = \frac{2}{3}$. Từ N vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AD tại P. Chứng minh :

a/ $MP \parallel (SCD)$

b/ $MN \parallel (SCD)$

c/ $SC \parallel (MNP)$.

5/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và SAD. Gọi M là trung điểm của CD. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp(IJM).

6/ Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB .

a/ Tìm giao tuyến của hai mp (SAB) và (GIJ) .

b/ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp (GIJ) .

Tìm điều kiện đối với AB và CD sao cho thiết diện là hình bình hành.

TỔNG HỢP

1/ Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC .

a/ Tìm giao tuyến của hai mp (BDN) và (ACM) .

b/ Tìm giao tuyến của hai mp (AMN) và $(ABCD)$.

c/ Chứng minh $G_1G_2 // (SAC)$.

d/ Xác định giao điểm của đường thẳng G_1N và mp (SBD) .

2/ Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AD . Gọi I là trung điểm của SD . Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD . Trên cạnh SA lấy điểm J sao cho $SJ=2JA$.

a/ Tìm giao tuyến của hai mp (ABI) và (SCD) .

b/ Tìm giao tuyến của hai mp (SAD) và (BCI) .

c/ Xác định giao điểm của đường thẳng GJ và mp (SBD) .

d/ Chứng minh $GJ // (ABCD)$.

3/ Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AD . Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và tam giác SCD .

a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

b/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

c/ Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

d/ Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (SBC).

Hết

Chương III VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN .

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.

Bài 1 : VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN .

Vấn đề 1 : CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ

- Nắm vững các phép toán cộng , trừ vectơ; nhân vectơ với một số .
- Quy tắc cộng : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Quy tắc trừ : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$
- ABCD là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
- I là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (M tùy ý)
- G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (M tùy ý)

$$\bullet \quad \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

- 1) Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Gọi I là trung điểm của MN. K là điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng :

a) $\vec{AC} + \vec{DB} = 2\vec{MN}$

b) $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

c) $\vec{KI} = \frac{1}{4}(\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD})$

- 2) Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm của AG.

a) Chứng minh : $3\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

- b) Chứng minh với điểm M bất kì , ta có :

$$3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6MO^2 + 3OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$$

Vấn đề 2 : PHÂN TÍCH MỘT VECTOR

Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng . khi đó một vector $\vec{d}$ bất kì đều phân tích được theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, nghĩa là tồn tại duy nhất bộ ba số m, n, p sao cho : $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

- 1) Cho hình chóp S.ABCD với G là trọng tâm của tam giác ABC. Hãy phân tích $\vec{SA}$ theo các vector $\vec{BC}, \vec{SB}$ và $\vec{SG}$.

2) Cho tứ diện ABCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$.

- Hãy phân tích $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DB}$ theo $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.
- Gọi M là trung điểm của BC. Hãy phân tích $\overrightarrow{DM}$ theo $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.
- Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

Vấn đề 3 : CHỨNG MINH 3 VECTO ĐỒNG PHẪNG

- Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gọi là **đồng phẳng** khi chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gọi là **đồng phẳng** khi tồn tại bộ ba số m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ (ít nhất một trong ba số m, n, p khác 0).
- Nếu hai trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng phương thì ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- Ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ Bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

1) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, K, L, M, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AA', A'D', D'C', C'C, CB$. Chứng minh :

- Các vector $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{LM}, \overrightarrow{RS}$ đồng phẳng.
- Các vector $\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{LK}$ đồng phẳng.
- 6 điểm I, K, L, M, R, S cùng thuộc một mặt phẳng.

2) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của $BB', A'C'$. K là điểm thuộc $B'C'$ sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài 2 : HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

Vấn đề 1 : GÓC GIỮA HAI VECTO

- Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Từ điểm O bất kì dựng : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó góc giữa h

vector $\vec{a}, \vec{b}$ chính là góc hình học AOB .

***Chú ý** : $0^0 \leq AOB \leq 180^0$

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

1) Cho hình chóp S.ABC có SA=SB=SC=AB=AC=a và BC= $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai vector :

a) $\vec{SA}$ và $\vec{BC}$.

b) $\vec{SB}$ và $\vec{AC}$.

2) Cho tứ diện ABCD.

a) Chứng minh : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$.

b) Suy ra nếu tứ diện ABCD có $\vec{AB} \perp \vec{CD}$ và $\vec{AC} \perp \vec{DB}$ thì $\vec{AD} \perp \vec{BC}$.

Vấn đề 2 : GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

• Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng a và b .

• Gọi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai vector chỉ phương của hai đường thẳng a và b .

+ Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) \leq 90^0$ thì $(a, b) = (\vec{u}, \vec{v})$.

+ Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) > 90^0$ thì $(a, b) = 180^0 - (\vec{u}, \vec{v})$.

✓ Vận dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông hoặc định lý Cos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

1) Cho tứ diện ABCD có AB=AC=AD=a, BC=BD= $a\sqrt{2}$ và CD=2a. Tính :

a) Góc giữa hai đường thẳng AD và BC.

- b) Góc giữa hai đường thẳng AB và CD.
- 2) Cho hình chóp S.ABC có $SA=SB=SC=a$, tam giác ABC vuông và $AB=AC=a\sqrt{2}$.
Tính
- a) Góc giữa hai đường thẳng AB và SC.
- b) Góc giữa hai đường thẳng SA và BC.
- 3) Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.
- 4) Cho tứ diện ABCD có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết $MN=a\sqrt{3}$, $BC=AD=a$. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và AD.
- 5) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABCD là hình thoi, $SA=AB$, $SA \perp BC$.
- a) Tính góc giữa SD và BC.
- b) Trên SB và SD lần lượt lấy hai điểm I và J sao cho $IJ \parallel BD$. Tính góc giữa IJ và AC.

Vấn đề 3 : CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- Chứng minh góc giữa hai đường thẳng bằng 90° .
- Chứng minh tích vô hướng của hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng bằng 0
- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

- 1) Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh $AO \perp CD$.
- 2) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABCD là hình bình hành. Tam giác SAB và tam giác SCD vuông tại A. Chứng minh :
- a) $SA \perp BC$, $SA \perp CD$.
- b) $SA \perp AC$, $SA \perp BD$.
- 3) Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Chứng minh $AD \perp BC$.
- 4) Cho tứ diện ABCD. Chứng minh:
- a) Nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.
- b) Nếu $AD=BD=CD$ và $\widehat{ADB} = \widehat{BDC} = \widehat{CDA}$ thì $AD \perp BC$, $BD \perp AC$, $CD \perp AB$.

- 5) Cho tứ diện ABCD có ABC và ABD là tam giác đều. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BD, DA. Chứng minh :
- $AB \perp CD$.
 - Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.
- 6) Cho hai hình vuông ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm là I và J. Chứng minh :
- $AB \perp IJ$.
 - CDJI là hình chữ nhật.

Bài 3 : ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG.

Vấn đề 1 : CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

- Chứng minh đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong mặt phẳng đó.
 - Nếu mặt phẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.
 - Nếu đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng còn lại.
- Chứng minh hai đường thẳng vuông góc nhau : chứng minh đường thẳng này vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

- Cho tứ diện S.ABC có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B.
 - Chứng minh $BC \perp (SAB)$.
 - Gọi AH và AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAC. Chứng minh $AH \perp SC$ và $SC \perp (AHK)$.
- Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình chữ nhật. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD.
 - Chứng minh các mặt bên của hình chóp S.ABCD là tam giác vuông,
 - Chứng minh $AH \perp (SBC)$ và $AK \perp (SCD)$.
 - Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
- Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông tâm O. Gọi H, J, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC, SD.
 - Chứng minh $BD \perp (SAC)$.
 - Chứng minh $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O và $SA=SC$, $SB=SD$.
 - Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

- b) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BA, BC. Chứng minh $IJ \perp (SBD)$.
- 5) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB=2a$, $AD=CD=a$, $SA=a\sqrt{2}$. Chứng minh các mặt bên của hình chóp là tam giác vuông.
- 6) Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác đều. Gọi H, O lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và tam giác SBC.
- a) Chứng minh $SC \perp (BHO)$.
- b) Chứng minh $OH \perp (SBC)$.
- c) Đường thẳng OH cắt đường thẳng SA tại N. Chứng minh tứ diện SBCN có các cạnh đối vuông góc nhau.
- 7) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều, $SC = a\sqrt{2}$.
Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD.
- a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.
- b) Chứng minh $AC \perp SK$, $CK \perp SD$.
- 8) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên SBC vuông tại B. Tam giác SCD vuông tại D, có $SD=a\sqrt{5}$. Chứng minh $SA \perp (ABCD)$.
- 9) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều. Tam giác SCD vuông cân tại S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.
- a) Chứng minh tam giác SIJ vuông.
- b) Chứng minh $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.
- c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ. Chứng minh $SH \perp AC$.

Vấn đề 2 : GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG a VÀ MP(P)

- Nếu $a // (P)$ hoặc $a \subset (P)$ thì góc giữa chúng là 0° .
- Nếu $a \perp (P)$ thì góc giữa chúng là 90° .
- Nếu a cắt (P) và không vuông góc với (P) thì góc giữa chúng chính là góc giữa a và a' là hình chiếu của a lên mp (P).

- 1) Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. $SA = AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$
- a) Tính góc giữa SB, SC với (ABC).
- b) Tính góc giữa SC với (SAB).

- 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$.
 Tính góc giữa :
 a) SA và $(ABCD)$;
 b) SC và (SAB) ;
 c) SB và (SAC) ;
 d) AC và (SBC) .
- 3) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ,
 $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = a$. Tính góc giữa :
 a) SB và $(ABCD)$;
 b) SC và $(ABCD)$;
 c) SD và $(ABCD)$.
- 4) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, $AB = a\sqrt{3}$, BCD là tam giác đều cạnh a . Tính góc giữa :
 a) AC và (BCD) ;
 b) AD và (BCD) ;
 c) AD và (ABC) .
- 5) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD , biết MN tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 60° .
 a) Tính MN và SO .
 b) Tính góc giữa MN và (SBD) .

Bài 4 : HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC.

LÝ THUYẾT :

1) Xác định Góc giữa hai mp (P) và (Q) :

Cách 1 : Là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mp đó,

Cách 2:

- Tìm giao tuyến c của 2 mặt phẳng (P) và (Q).
- Từ điểm I bất kì trên c , dựng hai đường thẳng a và b lần lượt nằm trong (P) và (Q), đồng thời vuông góc với c .
- Góc giữa hai mp (P) và (Q) chính là góc giữa hai đường thẳng a và b .

Cách 3 : cho đa giác H nằm trong mp(P) có diện tích S và H' là hình chiếu vuông

góc của H lên mp(Q) có diện tích S' . khi đó:

$$S' = S \cdot \cos \varphi$$

Với φ là góc giữa (P) và (Q).

2) Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc nhau :

Cách 1 : chứng minh trong mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Cách 2 : chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90° .

➤ **Chú ý** : hai mặt phẳng vuông góc nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

- 1) Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$.
 - a) Xác định góc giữa (SAB) và (ABC).
 - b) Biết $SA = 2a$, ABC là tam giác đều cạnh a. Tính góc giữa (SBC) và (ABC).
 - c) Biết $SA = 12$, $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$. Tính góc giữa (SBC) và (ABC).
- 2) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa :
 - a) (SBC) và (ABCD) ;
 - b) (SBD) và (ABCD) ;
 - c) (SAB) và (SCD) ;
 - d) (SBC) và (SCD).
- 3) Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD).
- 4) Cho hình chóp S.ABC có $SB \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A.
 - a) Chứng minh (SAB) $\perp$ (SAC).
 - b) Kẻ BH, BK lần lượt vuông góc với SB, SC. Chứng minh (BHK) $\perp$ (SAC).
- 5) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình chữ nhật. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Chứng minh :
 - a) (SAB) $\perp$ (SBC)
 - b) (SAD) $\perp$ (SCD) ;
 - c) (AHK) $\perp$ (SBC) ;
 - d) (AHK) $\perp$ (SCD).
- 6) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông .
 - a) Chứng minh (SBD) $\perp$ (SAC).
 - b) Gọi BE, DF lần lượt là hai đường cao của tam giác SBD. Chứng minh (ACF) $\perp$ (SBC) và (AEF) $\perp$ (SAC).

- 7) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh :
- $SI \perp (ABCD)$;
 - SAD và SBC là tam giác vuông ;
 - $(SAD) \perp (SAB)$ và $(SBC) \perp (SAB)$;
 - $(SDK) \perp (SIC)$.
- 8) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh
- $(SAD) \perp (SAB)$.
 - $(SHK) \perp (SAC)$;
 - $(SCK) \perp (SDH)$.
- 9) Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và $SA=a$. Đáy ABC vuông cân tại B với $AB=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng :
- (SBC) và (ABC) ;
 - (SAC) và (SBC) .
- 10) Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều , BCD là tam giác vuông cân tại D. Biết $AB=2a$, $AD=a\sqrt{7}$. Tính số đo góc giữa (ABC) và (DBC) .

Bài 5 : KHOẢNG CÁCH.

LÝ THUYẾT :

1) Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a :

Cách 1 : Trong mặt phẳng (O,a) , kẻ OH vuông góc với a tại H.

$$d(O,a)=OH$$

Cách 2 : (nhờ khoảng cách của điểm I)

✓ TH : OI song song a .

$$d(O,a)=d(I,a)$$

✓ TH : OI cắt a tại M

$$\frac{d(O,a)}{d(I,a)} = \frac{MO}{MI}$$

2) Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P) :

Cách 1 : Kẻ OH vuông góc với (P) tại H.

$$d(O,(P))=OH$$

Cách 2 : (nhờ khoảng cách của điểm I)

✓ TH : OI song song (P).

$$d(O,(P))=d(I,(P))$$

✓ TH : OI cắt (P) tại M

$$\frac{d(O,(P))}{d(I,(P))} = \frac{MO}{MI}$$

- 3) **Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song** là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này tới đường thẳng kia.
- 4) **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song** là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này tới mặt phẳng kia.
- 5) **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**
 - Bằng khoảng cách giữa đường thẳng này và mặt phẳng song song với nó đồng thời chứa đường thẳng kia.
 - Bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song nhau lần lượt chứa hai đường thẳng đó.
- 6) **Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a và b**
 - **Cách 1**
 - Dựng mp(P) chứa b và song song với a.
 - Chọn điểm M trên a, dựng MH vuông góc với a tại H.
 - Từ H, dựng đường thẳng a' song song với a và cắt b tại B.
 - Từ B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại A.
 - Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.
 - **Cách 2**
 - Dựng mp(P) vuông góc với a tại O.

- Dựng hình chiếu b' của b lên (P) .
- Dựng OH vuông góc với b' tại H .
- Từ H , dựng đường thẳng song song với a , cắt b tại B .
- Từ B , dựng đường thẳng song song với OH , cắt a tại A .
- Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .
- **Cách 3** (*Áp dụng khi $a \perp b$*)
 - Dựng $mp(P)$ chứa b và vuông góc với a tại A .
 - Dựng AB vuông góc với b tại B .
 - Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b .

❖ Độ dài của đoạn vuông góc chung là khoảng cách của a và b .

- 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , $SA=a$. Gọi I , M lần lượt là trung điểm của SC , AB .
 - a) Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.
 - b) Tính khoảng cách từ I đến CM .
 - c) Tính khoảng cách từ S đến CM .
- 2) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B , $SA=AB=a$.
 - a) Tính khoảng cách từ C đến (SAB) .
 - b) Tính khoảng cách từ B đến (SAC) .
 - c) Gọi D và E lần lượt là trung điểm của BC và SC .
 Tính khoảng cách từ A đến SD .
 Tính khoảng cách từ E đến AB .
- 3) Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$, I là trung điểm của đoạn SH . Tính khoảng cách :
 - a) Từ S đến (ABC) ;
 - b) Từ S đến BC ;
 - c) Từ I đến BC .
- 4) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA=2a$. Tính khoảng cách :
 - a) Từ A đến (SBC) ;
 - b) Từ A đến (SCD) ;

- c) Từ A đến (SBD) ;
 d) Giữa SA và CD ;
 e) Giữa AD và SC.
- 5) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình chữ nhật , $SA=AB=a$, $AD=2a$. Gọi E là chân đường cao hạ từ A của $\triangle ABD$.
- a) Chứng minh $(SAE) \perp (SBD)$.
 b) Tính khoảng cách từ A đến (SBD).
 c) Tính khoảng cách giữa các đường thẳng
- AD và SB ;
 - AB và SC.
- 6) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. O là tâm của mặt đáy. Gọi I , J lần lượt là trung điểm của AD và BC.
- a) Tính khoảng cách từ S đến (ABCD).
 b) Chứng minh $(SIJ) \perp (SBC)$.
 c) Tính khoảng cách từ O đến (SBC).
 d) Tính khoảng cách AD và SB.
 e) Tính khoảng cách từ S đến CI.
- 7) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, $SO \perp (ABCD)$, $SO=a$, $\widehat{BAD}=60^\circ$.
- a) Tính khoảng cách từ O đến (SBC).
 b) Tính khoảng cách giữa AD và SB.
- 8) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, $\triangle SAD$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với ((ABCD)). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.
- a) Chứng minh $(SIJ) \perp (SBC)$.
 b) Tính khoảng cách từ S đến (ABCD).
 c) Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng AD và SB, SA và BD.
- 9) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông cạnh a, $SA=a$. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng :
- a) SB và AD
 b) SC và BD
 c) SB và CD
 d) AB và SC
 e) AC và SD.
- 10) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại A, $BC=2a$, $AB=a\sqrt{3}$, $AA'=a$.
 Tính khoảng cách :
- a) Từ AA' đến $(BCC'D)$
 b) A đến $(A'BC)$

- c) A' đến (ABC').
- 11) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a.
- Chứng minh (BDD'B') $\perp$ (ACD').
 - Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và (BA'C').
 - Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD', BB' và AC'.
- 12) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AC.
- Chứng minh (BB'M) $\perp$ (BA'C').
 - Tính khoảng cách từ M đến (BA'C').

TỔNG HỢP

- Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, cạnh bên SB và SC hợp với mặt đáy góc 60° . Gọi I là trung điểm của BC.
 - Chứng minh (SAI) $\perp$ (SBC).
 - Tính góc giữa SI và (SBC).
 - Gọi D là điểm đối xứng với C qua A. tính khoảng cách từ D đến (SBC).
- Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB.
 - Chứng minh (SBC) $\perp$ (SAB).
 - Tính khoảng cách từ A đến (SBC).
 - Tính khoảng cách giữa SM và BC.
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh 2a, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{6}$. Gọi K là trung điểm của SD.
 - Chứng minh $AC \perp SD$.
 - Gọi H là trung điểm của SB. Chứng minh (OHK) $\perp$ (SAC).
 - Tính góc giữa SD và AB.
 - Tính góc giữa OK và (ABCD).
- Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Từ M dựng $SM \perp (ABCD)$, với $SA = SB = 2a$, $SC = SD = 3a$.
 - Chứng minh $SA \perp BC$.
 - Chứng minh (SMN) $\perp$ (SCD).
 - Tính góc giữa SC và (ABCD).
- Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD.
 - Chứng minh $CD \perp (SAD)$ và $(SAB) \perp (SBC)$.

- b) Tính góc giữa AM và BD.
- 6) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi O là chân đường cao của hình chóp, I là trung điểm của CD, OH là đường cao trong tam giác SOI.
- Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.
 - Tính góc giữa SB và (SAC) , biết $SO=a\sqrt{6}$, $AB=2a$.
 - Chứng minh $OH \perp AB$.
- 7) Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA=AC$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AC, SC, JC.
- Chứng minh $BC \perp SB$.
 - Chứng minh $BI \perp (SAC)$.
 - Chứng minh $SC \perp BK$.
 - Tính góc giữa BI và (SBC) , biết $SA=4a$.
- 8) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, $AC=a$, $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi M là trung điểm của CD.
- Chứng minh $CD \perp (SAM)$.
 - Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.
 - Tính góc giữa hai mp (SBD) và $(ABCD)$.
 - Tính khoảng cách giữa AC và SB.
- 9) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông tâm O, cạnh $2a$, $SA=2a\sqrt{6}$. Gọi M là trung điểm của AD.
- Chứng minh $OM \perp (SAD)$.
 - Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$.
 - Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.
 - Tính khoảng cách giữa OM và SC.
- 10) Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=2a$, $SA=a\sqrt{3}$.
- Chứng minh $BC \perp (SAB)$.
 - Dựng AK vuông góc với BD tại K. Chứng minh $(SBD) \perp (SAK)$.
 - Tính góc giữa SC và (SAB) .
 - Tính góc giữa (SCD) và $(ABCD)$.
 - Tính khoảng cách giữa AD và (SBC) .
 - Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính khoảng cách giữa BM và SN.

Hết